Sédimentation de macromolécules.

On assimile des macromolécules à des sphères de rayon $r = 1\ \mu$m, de masse volumique $\mu = 1,2.10^3$ kg.m^{-3}, en suspension dans un fluide de masse volumique $\mu_0 = 1,0.10^3$ kg.m^{-3} et de viscosité $\eta = 1,0.10^{-3}$ kg.m^{-1}.s^{-1}. L'intensité de la pesanteur est $g = 9,81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.

Question 1 :
Au bout d'un temps τ très bref, les molécules acquièrent une vitesse de chute constante v_∞. Calculer τ et v en fonction des données, puis numériquement. Calculer le nombre de Reynolds pour vérifier* a posteriori *l'hypothèse utilisée.

Projetons sur la verticale descendante l'équation du mouvement sans oublier la poussée d'Archimède ni la force de traînée (formule de Stokes) :

$$\frac{4\,\pi}{3}\,\mu\,r^3\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{4\,\pi}{3}\,\mu\,r^3\,g - \frac{4\,\pi}{3}\,\mu_0\,r^3\,g - 6\,\pi\,\eta\,r\,v$$

Par identification à la forme canonique $\tau\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v = v_\infty$, on tire :

$$v_\infty = \frac{2\,(\mu-\mu_0)\,r^2\,g}{9\,\eta} = \frac{2\,\mu^*\,r^2\,g}{9\,\eta}$$

avec $\mu^* = \mu - \mu_0$, et

$$\tau = \frac{2\,\mu\,r^2}{9\,\eta}$$

L'A.N. donne $\tau = 0,267\ \mu$s et $v_\infty = 0,437\ \mu\mathrm{m\,s^{-1}} = 1,57\ \mathrm{mm\,h^{-1}}$ (vitesse du microbe au galop ?).

Le nombre de Reynols est ici :

$$\mathcal{R} = \frac{\mu_0\,r\,v}{\eta} = 0,437\,10^{-6}$$

très largement dans la zone de validité de la formule de Stokes ($\mathcal{R} < 10$).

Question 2 :
En déduire l'existence d'une densité de flux de particules j_s, due à ce phénomène de sédimentation, que l'on exprimera en fonction des données et de la densité particulaire notée $n(z)$.

Cette densité de flux relève d'un phénomène convectif, c'est-à-dire mésoscopique.

A l'oral on peut évoquer l'analogie avec le $\overrightarrow{j} = \mu\,\overrightarrow{v}$ de la mécanique des fluides ou le $\overrightarrow{j} = \sum_i \rho_i\,\overrightarrow{v}_i$ de l'électromagnétisme pour affirmer que le flux *descendant* est $j_s = n\,v_\infty$.

Si l'examinateur demande des précisions, dites que, pendant $\mathrm{d}t$, les particules descendent de $\mathrm{d}z = v_\infty\,\mathrm{d}t$ et que celles qui traversent une surface horizontale d'aire $\mathrm{d}S$ pendant $\mathrm{d}t$ se trouvent initialement dans un cylindre de base $\mathrm{d}S$ et de hauteur $\mathrm{d}z$; elles sont donc contenues dans un volume $\mathrm{d}V = \mathrm{d}S\,\mathrm{d}z$ qui en contient, à l'altitude z,

$$\mathrm{d}N = n(z)\,\mathrm{d}V = n(z)\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}z = n(z)\,\mathrm{d}S\,v_\infty\,\mathrm{d}t$$

Le flux particulaire est $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ et la densité de flux *descendant*

$$j_s = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t} = n(z)\,v_\infty$$

Puisque les particules descendent, il y en a plus en bas qu'en haut, c'est pourquoi n dépend de z.

Question 3 :
La sédimentation a pour conséquence l'apparition d'un gradient de concentration donc

d'une densité de flux de particules j_d, due à la diffusion (de coefficient D). Exprimer j_d en fonction des données et de la densité particulaire $n(z)$.

Cette densité de flux relève d'un phénomène diffusif, c'est-à-dire microscopique.

Elle suit la loi de Fourier donc, si l'axe des z est, selon la tradition, orienté vers le haut, le flux diffusif *ascendant* est

$$j_d = -D\,\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}$$

Question 4 :
Que peut-on dire, en régime permanent, de la différence $j_s - j_d$? Et compte tenu de ce qui se passe au fond et en surface ?

Le nombre de particules contenues dans un cylindre de hauteut $\mathrm{d}z$ est constante, donc pendant un intervalle de temps $\mathrm{d}t$ il entre autant de particules par la cote z qu'il n'en sort par la cote $z + \mathrm{d}z$ on en déduit que les flux globaux, puis les densités de flux globales sont égaux ; donc la densité de flux globale est uniforme soit puisqu'elle est somme algébrique des contributions convective et diffusive

$$-j_s(z) + j_d(z) = Cte$$

Or au fond (et aussi en surface), le flux est nul, car aucune molécule ne peut quitter la solution en traversant le fond, donc la constante est nulle.

Question 5 :
En déduire que $n(z)$ vérifie la loi : $n(z) = n(0)\,\exp\left(-z/h\right)$ où l'on exprimera h en fonction des données.

On a donc

$$-n(z)\,v_\infty - D\,\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z} = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}n}{n} = -\frac{v_\infty}{D}\,\mathrm{d}z$$

d'où

$$n(z) = n(0)\,\exp\left(\frac{v_\infty\,z}{D}\right) = n(0)\,\exp\left(\frac{2\,\mu^*\,r^2\,g\,z}{9\,\eta\,D}\right)$$

Question 6 :
En identifiant ce résultat à une répartition de* Boltzmann*, en déduire la relation d'Einstein : $D = k_B\,T/6\,\pi\,r\,\eta$

La statistique de Boltzmann donnerait

$$n(z) = n(0)\,\exp\left(\frac{E(z)}{k_B\,T}\right)$$

où $E(z)$ est l'énergie potentielle de la macromolécule à l'altitude z. Le bilan de la pesanteur et de la poussée d'Archimède est une force en $m^*\,g = \mu^*\,V\,g$ avec $V = \frac{4\pi}{3}\,r^3$ donc une énergie en $m^*\,g\,z = \mu^*\,V\,g\,z$

En identifiant les arguments des exponentielles, on a :

$$\frac{2\,\mu^*\,r^2\,g\,z}{9\,\eta\,D} = \frac{\mu^*\,\frac{4\pi}{3}\,r^3\,g\,z}{k_B\,T}$$

d'où, en touillant à peine :

$$\boxed{D = \frac{k_B\,T}{6\,\pi\,r\,\eta}}$$